

02-04 Module et arguments d'un nombre complexe

Définition et notation

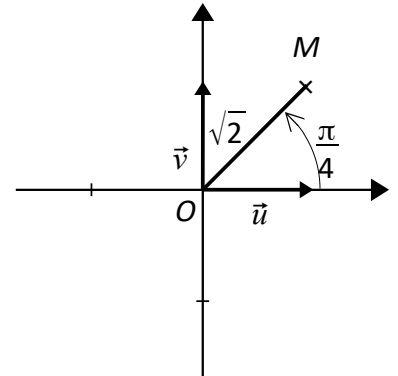
Soit z un nombre complexe non nul tel que $z = x + iy$ avec $(x ; y) \in \mathbb{R}^2$.

Soit M le point image de z dans le plan complexe muni du repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

- On appelle **module de z** le nombre noté $|z|$ égal à $\sqrt{x^2 + y^2}$.
- On appelle **argument de z** un nombre noté $\arg(z)$ égal à l'angle orienté $(\vec{u}; \overrightarrow{OM})$ modulo 2π .

Exemple

Le nombre complexe $(1 + i)$ a pour module $\sqrt{2}$ et pour argument $\frac{\pi}{4}$.



Remarque

- Dans le plan réel muni d'un repère orthonormé, on dit que le point de coordonnées cartésiennes $(1 ; 1)$ a pour **coordonnées polaires** $(\sqrt{2}; \frac{\pi}{4})$.
- Le nombre complexe 0 n'a pas d'argument.

Propriétés

Pour tout nombre complexe z on a :

- $|-z| = |z|$
- $|\bar{z}| = |z|$
- $z\bar{z} = |z|^2$

Pour tous nombres complexes z et z' , on a :

- $|zz'| = |z| \times |z'|$
- $\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$ si $z' \neq 0$.

Définition et notation

On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1.

Exemples

$$i \in \mathbb{U}, \quad (-1) \in \mathbb{U}, \quad \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \in \mathbb{U}.$$

Propriétés

Pour tout couple $(z ; z')$ appartenant à $\mathbb{U}^2$, on a :

- $zz' \in \mathbb{U}$.
- $\frac{1}{z} \in \mathbb{U}$.

02-04 Applications du cours

Application 1

Calculer le module et l'argument des nombres complexes suivants.

a] $z = 3.$

b] $z = -6.$

c] $z = 5i.$

d] $z = -2i.$

e] $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

f] $z = \frac{\sqrt{2}}{5} - i\frac{\sqrt{2}}{5}$

g] $z = -3 - 4i.$

Application 2

Calculer le module des nombres complexes suivants.

a] $z = (\sqrt{3} - i)^3$

b] $z = \frac{1}{1+5i}$

c] $z = \frac{1+5i}{\sqrt{3}-i}$

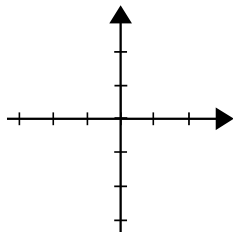
d] $z = (\sqrt{3}-i)(1+5i)$

Application 3

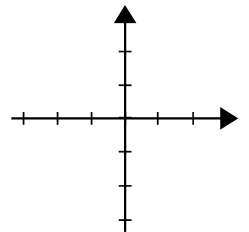
Le plan complexe est muni du repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Dans chaque cas, représenter l'ensemble des points $M(z)$ du plan vérifiant la ou les conditions données.

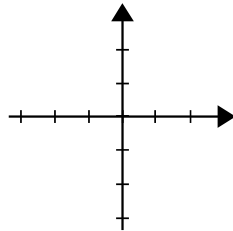
a] $\arg(z) = \frac{\pi}{3} [2\pi]$
et $|z| \leq 2.$



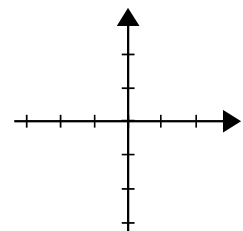
d] $\arg(\bar{z}) = \frac{\pi}{3} [2\pi]$
ou $\arg(-z) = \frac{5\pi}{4} [2\pi]$



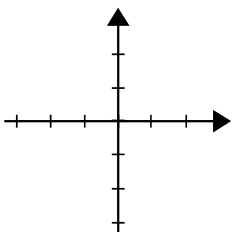
b] $\arg(z) = \frac{5\pi}{6} [2\pi]$
ou $\arg(z) = -\frac{\pi}{4} [2\pi]$



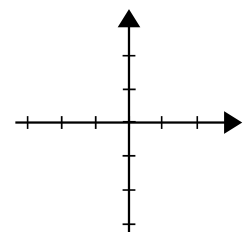
e] $\arg(z - i) = \pi [2\pi]$



c] $\arg(z) = 0 \left[\frac{\pi}{2} \right]$



f] $\arg(1+z) = \frac{\pi}{6} [2\pi]$
et $|z| > 1.$



Application 4

Déterminer l'ensemble (F) des points $M(z)$ dont l'affixe vérifie $\left| z + \frac{1}{2} - i \right| = \sqrt{2}.$